

ELEMENTOS DE RAZÓN Y PROPORCIÓN EN LA TRANSICIÓN HACIA EL ÁLGEBRA



Norma Patricia Rodríguez Linaldi, Juan de Dios Viramontes Miranda
 patylinaldi@gmail.com , jddviramontes@gmail.com
 Universidad Autónoma de Ciudad Juárez.
 Avance de investigación
 Básico.

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es llevar a cabo un estudio de aspecto didáctico para encontrar elementos sustanciales encuadrados en las nociones de razón y proporción que influyan de manera directa en la transición hacia el álgebra elemental en alumnos de secundaria. Se tomó como marco de referencia, la teoría cultural de la objetivación. Utilizamos una aproximación cualitativa de recolección de datos trabajando en tres fases con una muestra de 9 estudiantes de primer grado pertenecientes a una secundaria pública federal; se aplicaron actividades de aprendizaje con técnicas de lápiz y papel, manipulables y software de geometría dinámica comprobando que la razón y la proporción contienen elementos sustanciales que facilitan la transición hacia el álgebra elemental. El trabajo en equipo y los mediadores semióticos jugaron un papel fundamental en la generación de aprendizaje.

Palabras clave: *Transición, Álgebra, razón, proporción, objetivación.*

1. INTRODUCCIÓN

A través de la historia de las matemáticas, se encuentra evidencia científica y práctica de la existencia de problemas y obstáculos que se presentan en la transición de la aritmética al álgebra elemental en los estudiantes que pasan de primaria a secundaria, siendo entonces de gran importancia estudiar dicho fenómeno con la finalidad de ofrecer mejores herramientas y elementos que optimicen y hagan más eficiente la enseñanza-aprendizaje del álgebra elemental de tal manera que se genere un puente sólido que acorte la brecha en dicha transición, permitiendo así acceder al pensamiento algebraico avanzado.

Por tal motivo esta investigación centra su estudio en el aspecto didáctico de las nociones de razón y proporción considerando la abundancia de elementos sustanciales inmersos en ellas que influyen de manera directa en la transición hacia el álgebra en alumnos de secundaria.

En este estudio utilizaremos una aproximación cualitativa de recolección de datos debido a que nuestra perspectiva teórica es socio-cultural. Los elementos clave de la teoría cultural de la objetivación que se manejan son: *la mediación semiótica, la actividad y el trabajo en grupos*. Las situaciones en torno a las que se desarrolla la presente investigación son: la noción de razón y proporción que tienen los estudiantes de primer grado de secundaria así como elementos que caracterizan la transición de la aritmética al álgebra y que sean generadores de significados facilitando este proceso.

2. MARCO TEÓRICO

Esta investigación tiene como marco teórico de referencia la Teoría Cultural de la Objetivación propuesta por Luis Radford en el año 2006 quien la presenta como una teoría de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, apoyando una concepción esencialmente social del aprendizaje en donde se afirma que el cerebro opera con los elementos y objetos que obtiene del contexto

cultural y los mismos recursos obtenidos constituyen la actividad mental. Define lo que es el pensamiento a partir de una práctica social, es decir, considera el pensamiento como “una reflexión mediatizada del mundo de acuerdo con la forma o modo de la actividad de los individuos” (Radford, 2006, p.107). Propone utilizar siempre la mediación semiótica que es el rol que juegan los artefactos en la realización de la práctica social (Vygotsky, 1981). Estos artefactos son generalizaciones de objetos, instrumentos, sistemas de signos, todo lo que pueda considerarse como un artefacto, es válido para esta mediación.

A través de los sentidos el individuo tiene contacto con los artefactos u objetos del saber y esto genera que se active el pensamiento, por lo tanto en la actividad matemática se generan los objetos matemáticos propios a su contexto cultural, y a su vez se genera una superestructura simbólica llamada por Radford (Radford, 2003, p.109) “Sistemas semióticos de significación cultural”. Entonces el aprendizaje consiste en “dotar de sentido a los objetos conceptuales que encuentra el alumno en su cultura” (Radford, 2006, p.113), esto es a lo que se llama objetivación cultural del saber, en otras palabras, el proceso de objetivación es la elaboración activa de significados con el fin de adquirir conocimientos. Se consideran dos fuentes importantes de elaboración de significados que sustentan la adquisición del saber: el saber depositado en los artefactos y la interacción social.

Al contacto con el artefacto, el individuo modifica su actividad y desarrolla capacidades humanas nuevas, tanto motrices como intelectuales como en el caso de la anticipación, la memoria y la percepción (Vygotsky y Luria 1994). Entonces, el elemento esencial que da sentido y significación a la actividad, según Leontiev (1993), es la reflexión que el estudiante elabora de la relación que se da en común y de forma activa con su realidad histórica y cultural y que se da a través de la acción debido a que los objetos matemáticos sólo pueden ser percibidos por medio del pensamiento. Por lo anterior es indispensable conocer los objetos y productos del desarrollo cultural, para ello es ineludible llevar a cabo actividades que los involucren y que revelen su esencia (Leontiev, 1968). En la misma tónica, la objetivación del saber se da a través de un proceso social siendo la sociabilidad un proceso de toma de conciencia común, generándose así el saber común o saber con otros.

Apoyando lo anterior, Todorov(1984) sostiene que se deben construir vínculos y relaciones ya que lo social involucra compartir objetivos, formar parte de las actividades del grupo y mantener una comunicación con los demás individuos. Por ello, como primer parte del trabajo se realiza la actividad en pequeños grupos con el propósito de que los alumnos se apoyen mutuamente en la búsqueda de la solución de los problemas que se les proporcionan. Como segunda parte, se propone el intercambio entre pequeños grupos en donde comparten las reflexiones producidas por los mismos. “Un grupo intercambia sus soluciones con otro grupo, con el fin de entender otros puntos de vista y mejorar los propios” (Radford, 2006, p.121). La tercer parte consiste en llevar a cabo una discusión general del grupo, en la cual se pueden intercambiar y discutir las ideas, teniendo todos los miembros la misma oportunidad de participar. En este momento el profesor puede lanzar la discusión en puntos medulares que necesiten de mayor profundidad de acuerdo con los programas escolares.

Los pilares en los que se sostiene la teoría de la objetivación, están estructurados en torno a los siguientes conceptos interrelacionados: el concepto del pensamiento, el concepto de aprendizaje, los sistemas semióticos de significación cultural, el concepto de objeto matemático, la objetivación y el concepto de individuo (ser-con-otros).

3. DEFINICIÓN DE RAZÓN Y PROPORCIÓN VISTA DESDE LA MATEMÁTICA EDUCATIVA

Las nociones de razón y proporción han estado presentes a lo largo de la historia de las matemáticas y en estas nociones encontramos elementos tanto de carácter aritmético como algebraico y además enmarcan una serie de conocimientos básicos necesarios como: el uso de símbolos, literales y del signo igual, así como el pensamiento multiplicativo, la percepción de relación y la percepción de patrones por ello esta investigación se enfoca en dichas nociones ya que ofrecen una riqueza de elementos trascendentales presentes en el proceso de transición hacia el álgebra como los que se mencionan. Se considera evaluar el impacto que provoca la intervención de estos elementos en la transición de la aritmética al álgebra, y analizar en qué medida permiten librar los obstáculos que puedan presentarse actualmente en el camino de la enseñanza-aprendizaje del álgebra.

Considerando que la razón y la proporción son las nociones centrales que nos ocupan, se muestra aquí una breve definición matemática de razón: es el resultado de comparar dos cantidades relacionadas entre sí (Katz, 1998). La razón geométrica se puede expresar como fracción con sus respectivos elementos $\frac{a}{b}$ ó con el signo de división $a \div b$, así como también con el signo de dos puntos entre las dos cantidades $a:b$. Y una breve definición de proporción: es la igualdad de dos razones de una misma clase y que tienen el mismo valor. Se expresa de la siguiente forma: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ó $a : b = c : d$, y se lee **a** es a **b** como **c** es a **d** (Heath, 1956).

4. MÉTODO

En este estudio utilizamos una aproximación cualitativa de recolección de datos debido a que nuestra perspectiva teórica es socio-cultural. Los elementos clave de la teoría de la objetivación que se manejan son: la mediación semiótica, la actividad y el trabajo en grupos. La investigación se lleva a cabo con alumnos de primer grado de la Escuela Secundaria Federal #5 de Cd. Juárez, Chihuahua. Se toma una muestra intencional de 9 alumnos con un nivel de aprovechamiento medio (con promedio académico entre 7 y 8) en la materia de matemáticas siendo seleccionados 2 alumnos por grupo de los 5 grupos de primer grado que participaron, según criterio de los maestros. El motivo principal de seleccionar alumnos con ese promedio fue analizar la carencia de elementos y herramientas que se relacionan con razón y proporción existentes en los estudiantes y determinar si son obstáculos (en la transición) para arribar al pensamiento algebraico. Aludiendo al trabajo con grupos de la teoría de la objetivación, se trabaja con grupos de 3 miembros por sugerencia de Radford (Radford, 2006, p.119) para obtener mejores resultados en las actividades didácticas.

Se aplican actividades de aprendizaje con el fin de revelar evidencias que permitan evaluar si las nociones de razón y proporción son generadoras de elementos básicos para construir un puente que facilite al estudiante su transición hacia el álgebra elemental. Se utiliza la técnica de Lápiz y papel, así como el software de geometría dinámica GeoGebra y manipulables. Se decide seleccionar el software GeoGebra por las ventajas que ofrece de acceso y manejabilidad para la actividad a realizar.

El procedimiento que se utiliza para trabajar con las actividades de aprendizaje se divide en 3 fases: a) cuestionario inicial de sondeo, b) implementación de actividades de aprendizaje, y c) cuestionario final. Las técnicas de recolección de datos son: cuestionario inicial; observación del

investigador tomando notas de campo, fotos y video en las diferentes sesiones; análisis de las actividades de aprendizaje, aplicación de cuestionario final y la entrevista.

5. RESULTADOS

Debido a la naturaleza cualitativa de este estudio, los porcentajes utilizados en los cuadros y las tablas de análisis de datos no representan cantidades absolutas o totalitarias, sino meros indicadores que nos permiten tener una referencia de forma rápida y concisa de cantidades no medibles como lo sería: *muchos* y *pocos* (de elementos o personas); para poder comparar los avances de un aspecto a otro, o bien para poder explicar el grado de manejo de un elemento.

ETAPA I: Cuestionario de Sondeo

Consta de 16 reactivos en 3 secciones y el propósito es conocer la noción de razón y proporción que tienen los 9 estudiantes de primer grado de secundaria que conforman esta muestra, por medio de preguntas (Figura 1) que implican, sintaxis y lenguaje en torno a estas nociones, percepción de relación de dependencia, uso del signo igual, pensamiento multiplicativo, uso de razón y proporción en lenguaje natural, trazo de figura proporcional validando uso del pensamiento multiplicativo y percepción de patrones. Ver resultados generales en Tabla 1.

Respuestas	Promedios por sección			
	General	Sección I	Sección II	Sección III
NC	75.0%	90.5%	48.1%	70.4%
TI	12.5%	4.8%	33.3%	11.1%
SC	12.5%	4.8%	18.5%	18.5%
Total	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%

3. Cite tres pares de números cuya razón sea $\frac{3}{4}$.

$\frac{9}{8}$ $\frac{16}{12}$

2. Cite tres pares de números que estén en la relación de 2 y 3.

~~30~~ - 66 - 6 - 12

Tabla 1. Porcentajes de reactivos NC (no contestados, nulos, erróneos), TI (parciales, incompletas), SC (Contestados correctamente), por sección y de forma grupal general.

Figura 1. Ejemplo de preguntas de sección

En la sección 2 se les pidió dibujar una figura proporcional de mayor tamaño a la dada y algunas se muestran a continuación teniendo respuestas erróneas en su mayoría (Figura 2).

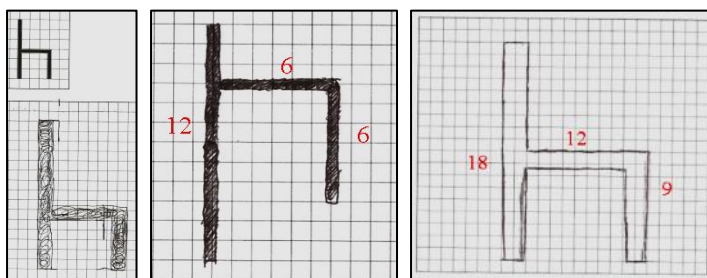


Figura 2. Figuras trazadas por estudiantes de la muestra en esta sección.

La sección 3 contiene problemas de aplicación como se muestra en Figura 3.

1. En un puesto de naranjas se venden 3 por \$15. ¿Cuántos pesos se pagará por 2 docenas de naranjas?

A) \$120 B) \$ 12 C) \$ 360 D) \$ 100

2. En una caja hay 200 caramelos de dos sabores: limón y naranja. Si por cada caramelo de limón hay 3 de naranja, ¿Cuántos caramelos de naranja hay en la caja?

A) 120 B) 80 C) 150 ✓ D) 100

Se \div 3 entre 200 y queda 150 que es la respuesta correcta

Figura 3. Problemas de aplicación en lenguaje natural.

Existen deficiencias notorias en elementos como: el pensamiento multiplicativo, la percepción de relación de dependencia, percepción de patrones numéricos y geométricos, sintaxis, uso del signo igual, así como en el uso de símbolos y literales. Acerca de la noción que tienen de proporción, utilizan el término *igual* para manifestar correspondencia, en general mencionan que se trata de cosas iguales, equivalentes o que se refiere a obtener el doble de una cantidad o la mitad, también piensan que es encontrar el múltiplo, perciben de forma más marcada que las cantidades aumentan ya que no mencionan que disminuyan aunque consideren ‘la mitad’ como algo proporcional, no lo perciben como disminución.

ETAPA II: Actividades de Aprendizaje

La Familia E: El objetivo es observar la habilidad de plasmar los resultados obtenidos en la tabla de cantidades proporcionales (Figura 4), de trazar la figura proporcional (Figura 5) así como la utilización de mediadores semióticos (Figura 6), y el trabajo en grupos (Tabla 2). A continuación se muestra una tabla llena por el equipo #3 en donde se observan errores muy marcados en el llenado de la tabla. Esta actividad está basada en: Butto y Rojano (2009).

Identidad y parentesco	Medida de línea superior horizontal.	Medida de línea de en medio, horizontal.	Medida de línea inferior horizontal.	Medida de cada línea vertical.
Hijo	75	25	75	50
Mamá	150	50	150	50
Papá	225	75	225	150
Tío	450 900	150 300	450 900	150 550
Abuelito	450	150	450	300

Figura 4. Tabla de cantidades proporcionales que deben llenar los estudiantes.

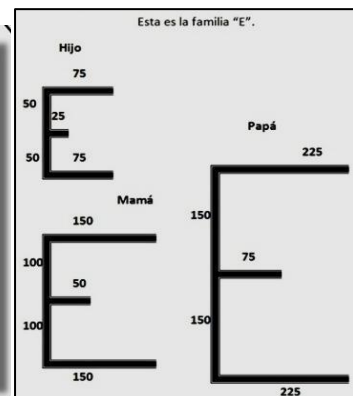


Figura 5. Figuras a considerar para llenar la tabla y trazar las figuras proporcionales.



Figura 6. Mediadores Semióticos utilizados.

	Patrón numérico	Pensamiento Multiplicativo	Relación de dependencia	Aplicación de razón	Aplicación de proporción	Figura Proporcional	Uso de literales
Respuesta	En porcentajes						
Si	33%	67%	0%	33%	33%	33%	0%
No	67%	33%	0%	33%	33%	67%	100%
Defic.	0%	0%	100%	33%	33%	0%	0%

Tabla 2. Elementos de razón y proporción presentes, utilizados en la actividad de los equipos.

Con la discusión grupal, lograron entender el uso de algunos elementos al comparar sus resultados y enriquecieron sus conceptos. Según palabras de los estudiantes dijeron que aprendieron “a sacar la proporcionalidad de las cosas”. Con los resultados notamos que percibieron el patrón numérico y abonaron a su noción de proporcionalidad y razón.

El rompecabezas mágico: El objetivo de esta actividad es observar el uso de razón y proporción (Tabla 3) en la construcción de un rompecabezas de mayor tamaño (Figura 8) pero proporcional al dado en las instrucciones (Figura 7). Actividad basada en: Brousseau (1997).

Resp.	Razón	Proporción	Igualdad	Pens. Multip.	Perc. Patrón	Sintaxis	Literales	Perc. Depen.	Ensamble Pzas.	Total
Si	66.7%	66.7%	33.3%	66.7%	66.7%	33.3%	33.3%	66.7%	66.7%	55.6%
No	33.3%	33.3%	33.3%	33.3%	0.0%	66.7%	66.7%	33.3%	33.3%	37.0%
Defic.	0.0%	0.0%	33.3%	0.0%	33.3%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	7.4%
Total	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%

Tabla 3. Promedio del porcentaje de elementos de razón y proporción, utilizados por los estudiantes en la actividad.

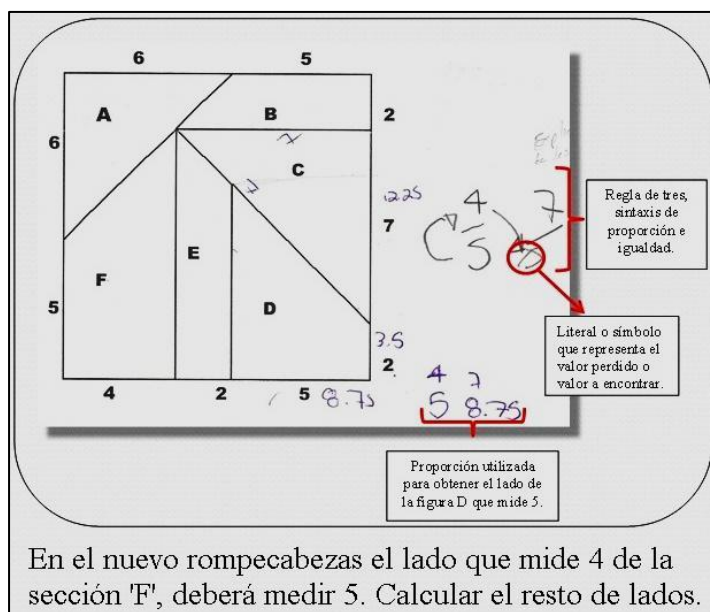


Figura 7. Rompecabezas tomado de Brousseau, G. (1997).



Figura 8. Nuevo rompecabezas obtenido por el grupo.

Los dos hermanitos: Se pretende observar la forma en que el estudiante identifica la razón y proporción, por medio de geometría dinámica con la manipulación de triángulos semejantes en el software GeoGebra (Figura 9) como se muestra a continuación, siguiendo actividad de aprendizaje (Figura 10).

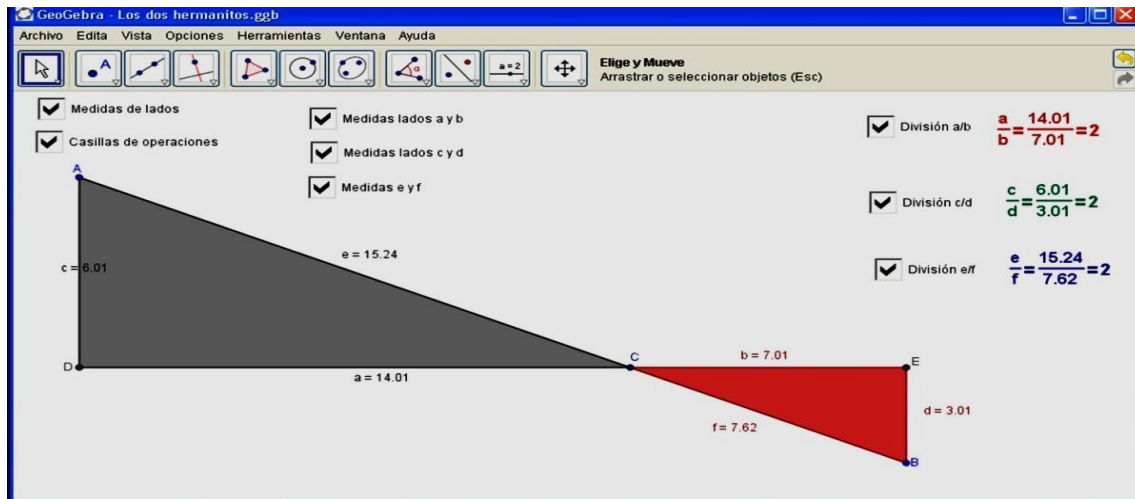


Figura 9. Actividad en software de geometría dinámica; siendo manipulables las longitudes de los lados de los triángulos.

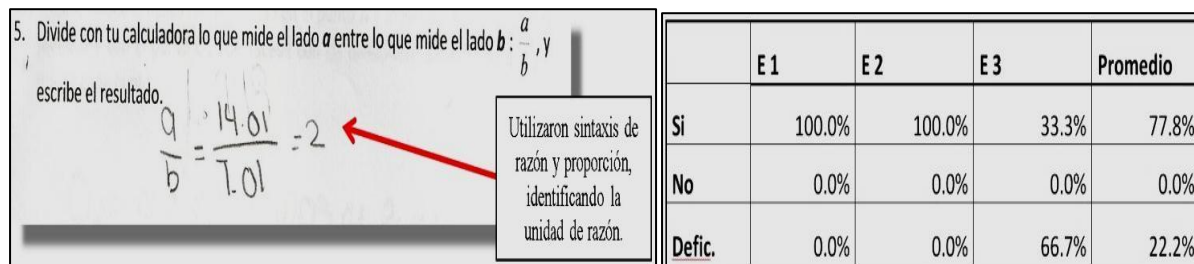


Figura 10. Pregunta contenida en la actividad de aprendizaje.

Tabla 4. Porcentaje de elementos empleados por equipo.

	Percep. Patrones	Reconoci- miento de razón	Relación de dependencia	Aplicación de razón	Reconoci- miento de proporción	Uso de literales
Resp.	En porcentajes					
Si	67%	100%	67%	67%	67%	100%
No	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Defic.	33%	0%	33%	33%	33%	0%

Tabla 5. Promedio de porcentajes de aplicación de cada elemento a nivel grupal.

ETAPA III: Cuestionario Final

Contiene reactivos similares al cuestionario de sondeo. Se muestra a continuación tabla con resultados grupales y por sección (Tabla 6) así como porcentajes de reactivos por estudiante (Tabla 7). Se observan algunas figuras proporcionales trazadas por los estudiantes (Figura 11), la justificación de uno de los trazos (Figura 12), y un ejemplo de problemas de aplicación (Figura 13).

Porcentaje	General	Promedios por sección		
		Sección I	Sección II	Sección III
NC	45.2%	7.4%	55.6%	54.2%
TI	12.6%	18.5%	16.7%	8.3%
SC	42.2%	74.1%	27.8%	37.5%
Total	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%

Tabla 6. Porcentaje de respuestas a los reactivos de forma grupal y por sección del cuestionario final.

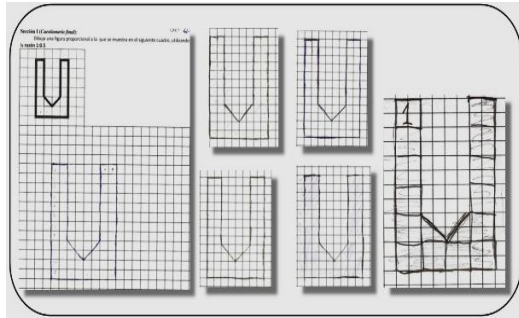


Figura 11. Figuras proporcionales trazadas.

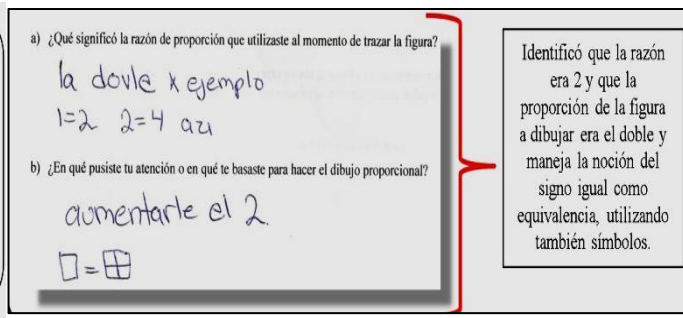


Figura 12. Justificación que da el estudiante del trazo de la figura.

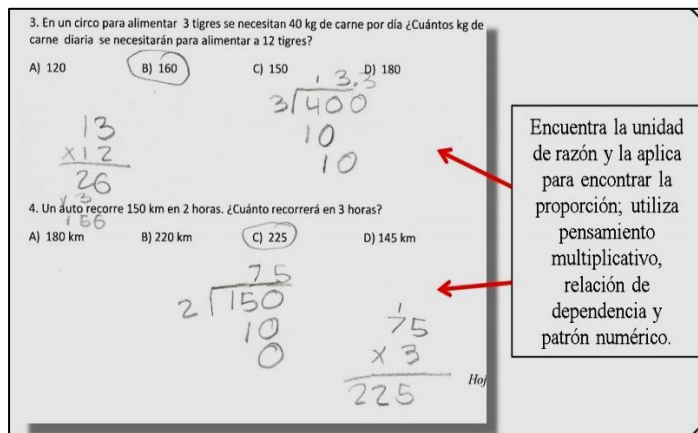


Figura 13. Problemas de aplicación contenidos en la Sección III.

Clave	Equipo	NC	TI	SC
1 B	E-1	53.3%	6.7%	40.0%
2 E	E-1	53.3%	0.0%	46.7%
1 F	E-1	53.3%	6.7%	40.0%
		53.3%	4.4%	42.2%
1 A	E-2	33.3%	26.7%	40.0%
2 B	E-2	13.3%	13.3%	73.3%
1 C	E-2	26.7%	6.7%	66.7%
		24.4%	15.6%	60.0%
2 F	E-3	46.7%	26.7%	26.7%
2 C	E-3	66.7%	13.3%	20.0%
1 E	E-3	60.0%	13.3%	26.7%
		57.8%	17.8%	24.4%

Tabla 7. Porcentaje de reactivos por estudiante.

En la Tabla 6 se ve una notable mejoría con respecto a la Tabla 1 del cuestionario de sondeo.

6. CONCLUSIONES

Algunos elementos importantes para facilitar la transición hacia el álgebra elemental son: relación de dependencia, pensamiento multiplicativo, significado de igualdad y percepción de patrones tanto numéricos como geométricos. Se observa una relación directa de los elementos anteriores con el resultado obtenido al trazar la figura proporcional, ya que sólo quienes manejan estos elementos logran tener resultados satisfactorios. Una situación que influyó como obstáculo para lograr la figura proporcional fue la falta de comprensión lectora. La noción que tienen los 9 estudiantes que pertenecen a la muestra seleccionada, sobre razón, es nula ya que para ellos pasa desapercibida debido a que no forma parte del programa de estudios visto hasta la fecha y ellos manifiestan no haber tenido contacto con esta noción anteriormente.

A mejor manejo de percepción de patrones y de relación de dependencia, mayor es el reconocimiento de razón y proporción, y a mejor trabajo realizado en equipos, los resultados en cada actividad también fueron mejores. Por otro lado, se comprobó que efectivamente, la razón y la proporción contienen elementos sustanciales que facilitan la transición hacia el álgebra elemental. Esto puede utilizarse como herramienta por los profesores de primaria y secundaria para una enseñanza más sólida que tienda ese puente y acorte la brecha existente en la transición de la aritmética al álgebra.

Aludiendo a la mediación semiótica de la teoría cultural de la objetivación, los mediadores semióticos se hicieron presentes en todas las actividades de tal forma que algunos miembros de los equipos abonaban al cúmulo de significados que sus compañeros tenían sobre una situación u objeto matemático haciendo uso de un artefacto que sirvió como medio para darle sentido en ese momento al objeto en cuestión, generando así un proceso de elaboración activa de significados a través del cual se dio aprendizaje, a esto es a lo que se llama objetivación.

7. REFERENCIAS

- Texto Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des Mathématiques, 1970-1990*. Dordrecht: Kluwer academic publishers.
- Butto Zarzar, C. y Rojano Ceballos, T. (2009). Pensamiento algebraico temprano. *X Congreso Nacional de Investigación Educativa: educación y conocimientos disciplinares*, (área 5).
- Heath, T. L. (1956). *Euclid The thirteen books of the Elements*. New York, N.Y: Dover Publications.
- Katz, V. (1998). *A History of Mathematics: an introduction*. U.S.A.: Addison Wesley Longman.
- Leontiev, A. N. (1968). El hombre y la cultura. *El hombre y la cultura: problemas teóricos sobre educación* (9-48). México: Editorial Grijalbo.
- Leontiev, A. N. (1993). *Actividad, conciencia y personalidad*. México: ASBE Editorial.
- Radford, L. (2003). On culture and mind. A post-Vygotskian semiotic perspective, with an example from Greek mathematical thought. *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing*, 49-79.
- Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, (Número Especial) 103-129.
- Todorov, T. (1984). *Mikhail Bakhtin: the dialogical principle*. Minneapolis, London: University of Minnesota Press.
- Vygotsky, L. S. (1981). The instrumental method in psychology. *The concept of activity in Soviet psychology* (135-143). Armonk, N. Y.: Sharpe.
- Vygotsky, L. S. y A. Luria (1994). Tool and symbol in child development. *The Vygotsky Reader* (99-174). Oxford: Blackwell.